# ディオファンタス近似の$G$-関数への拡張 (「整数論のこの主題,自分はこう考える」若手発表会)



永田, 誠

数理解析研究所講究録 1256 巻 2002 年 1-16



# ディオファンタス近似の $G$-関数への拡張

永田 誠

京都大学 数理解析研究所

## §0 Introduction

先日、数理解析研究所で行われた研究集会「整数論のこの主題、自分こう考える」で話させていただいたこと $+\alpha$、について報告させて頂きます。
この研究集会で発表させていただいた内容はそれ自体がイントロ的な内容でしたので、ここではそこで話した内容の他に、もう少し突っ込んだ話も付け加えることにします。

最初に、タイトルにある $G$-関数、というものを、少しだけ説明します。

まず、

$G$-関数、とは、数体上有理関数係数の線形微分方程式の解、のあるクラス

のことです。

さて、「代数関数」は、勿論有理関数係数の「代数方程式の解」ですが、一方、有理関数係数の線形微分方程式の解、にもなっています。

以下の話で微分方程式が出てきますが、出てくる話は断りがない限りすべて数体（有限次代数体）上での話です。定数体は数体とします。

そこで、唐突ですが、線形微分方程式の解のジャンルわけ、みたいなものを私なりに考えてみます。このように分けるのは不適切だ、とお叱りをうけるかもしれませんが、この場だけの話だとしてお許しください。

(線形微分方程式の解のジャンルわけ by 著者)

代数関数 | 近-代数関数 || 遠-代数関数

ここで、近-代数関数、やら遠-代数関数やらという単語は私の造語で（未定義）用語です。私自身、近-代数関数やら遠-代数関数やら他で聞いたことがありません。

近-ほにゃらら、遠-ほにゃらら、という用語が他にもありますが、それらとは全く関係がない、単に話の説明上、便利な単語として、近-代数関数やら遠-代数関数やら、と著者が単なる思いつきで勝手に言っている、とお考えください。もっと適切な言い方があるかもしれませんので、完全にこの場だけの言葉、とお考えください。

で、言葉の感じから、

・近-代数関数、とは、代数関数を含むクラス、なのだけれども、しかし代数関数でないものを含むような、なにか、代数関数を少し拡張したような、関数たち。

・遠-代数関数、とは、代数関数を含まない、気分的には代数的数というよりは、超越数、な気持ちがする関数たち、

という意味、とさせてください。
気持ちは上のような意味、なのですが、繰り返しておくと、近-代数関数やら遠-代数関数やらという単語は私の造語でここだけの（未定義な）用語、です。

こう書いてみたときに、$G$-関数とは「近-代数関数」に対応するのではないかな…、と思っています。

(線形微分方程式の解のジャンルわけ by 著者)

| | | |
|---|---|---|
| 代数関数 | 近-代数関数 | 遠-代数関数 |
| | $G$-関数 | |

つまり、

$G$-関数、とは、数体上定義の代数関数を含む、線形微分方程式の解、のあるクラス

のことです。

代数関数を含む、という意味でして、代数関数以外に対数関数等も $G$-関数であります。

で、このジャンルわけで、遠-代数関数とは何か？となりますが、それはあとで言及させていただきます。

さて、タイトルにもある、ディオファンタス近似、についてですが、これは、代数曲線の「有理点」に関する近似の話題、と考えることができます。それを、近-代数関数なる $G$-関数に拡張しよう、というのが今回の話です。

この報告全体の構成は、次の通りです。

§0: Introduction.
この章です。
§1: Motivation.
動機、というよりは、話題全体に関しての話の流れ、みたいなものを簡単に解説します。
§2: $G$-関数は代数関数に近い
この章で、$G$-関数の定義をします。そして、$G$-関数は代数関数に近いもの、とみれるフシがあるので、$G$-関数（の特殊値問題）は超越数からの視点でみるより、代数関数の視点でみた方がすっきりしているのではないか？ということを述べます。
§3: Results
今回の話の主結果を述べます。
§4: ＋$\alpha$
発表のときには述べることが出来なかった、しかし自分にとってはこの話題の一番楽しい（?）ところを述べます。

## §1 Motivation

今、ディオファンタス近似は曲線の有理点に関する話だ、と述べました。
ということで、カッコイイ formulation がわからなかったのですが、最初にそれを復習しておきます。

以下、$K$: 数体 with $[K:\mathbb{Q}]<\infty$ とする。
Liouville の不等式を復習します。

命題 1 (Liouville's inequality)
いきなり、で申し訳ないのですが、上手い formulation を知らないので、

genus が 0 で、さらに特別なものの場合だけ、考える

ことにします。

Let $f(x,y):=x-g(y)\in K(x,y)$, $g(y)\in K(y)$, $n:=\deg_y g(y)$.
Put

$$S_1:=\{g(y)\in K \mid y\in K\}=\{x\in K \mid \exists\, y\in K \text{ s.t. } f(x,y)=0\}.$$

（不細工、なんですが、有理点の集合みたいなものを考えているつもりです。）

Let $t$ be in $K$ with $\frac{d}{dy}g(t) \neq 0$: fixed. Put $a := g(t)$. Then there exists an effective constant $c > 0$ such that

$$|\alpha - a| > \frac{c}{H(\alpha)^{[K:\mathbb{Q}]/n}} \quad \text{for } \forall\, \alpha \in S_1 \text{ with } \alpha \neq a.$$

($c$ is independent of $\alpha$ .) ここで $|\cdots|$ は通常の絶対値、$H(\alpha)$ は the absolute Height of $\alpha$. である。 □

これの $f(x,y) = x - y$, $g(y) = y$ の場合が、普通にいうところのいわゆる Liouville の不等式です。

この Liouville の不等式は、超越数論では馴染みが深いものかと思われます。というのは超越数論の教科書をみると、最初の方に、人類最初の超越数の発見はこの Liouville の不等式による、と書かれているからです。
後の話の都合のよい（?）サンプルになっていますので、ここで一つ超越数の例を与えておきます。Liouville の不等式から次が導かれます：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}} \quad \text{は超越数。} \quad \square$$

これをみると、

収束の速い級数（でかける数）は代数的（数）でない（らしい）

というのが想像出来ると思います。ただしここでいう級数の各項は代数的数とします。

通常ならば、ここは（$\mathbb{C}$ の位相での）ベキ級数関数の収束半径の話題等として議論すべきかもしれませんが、感覚的なものを優先させていただいて、収束が速い遅い、という言葉を使わせて頂きます。

とにかく、この級数は収束が速いので Liouville の不等式にひっかかり、超越数であることが導かれます。
この、収束の速い級数は代数的でない（らしい）、ということは §2 でもう一度現れます。

この命題 1 は genus 0 の特別な場合したが、一般に次も知られています。チャンと書くととても大変ですが、簡単に述べますと

（注意）[1]
「代数曲線が positive genus を持つならその有理点に関するディオファンタス近似のもっと sharp な評価が知られている。」 □ （[Se] 参照）

どういうものかというと、Liouville の不等式の左辺が有理点のある Weil function で、右辺の Height がその Weil Height になっていて、Height の肩に乗っている数は $\epsilon$, すなわちいくらでも小さくても良い、というものです。
ただしこれは Roth の定理の意味です。つまり、体 $K$ を fixed しなくてもよい、の意味ですが、しかし一方 Liouville の不等式のように（定数 $c$ が）effective というものでもありません。
今回の話では Roth の定理の話はしません。Roth の定理に関してはこれでオシマイにします。

ここで、強調しておきたいのは、

代数曲線の有理点（という集合に限って）のディオファンタス近似

を考えている、という、自然な考えだと思いますが、とにかく、「有理点のディオファンタス近似」なわけです。

さて、有理点、つまり空間の方でなくて、関数空間の方、といってよいと思いますが、

代数関数 /$\mathbb{C}$ の関数論的なディオファンタス近似

も知られています。これは例えば、代数関数を有理関数で近似する、というものです。

[1]For $C$: an irreducible algebraic curve with positive genus, and for $\forall\, \epsilon > 0$, we have

$$\text{a Weil function at } P \geq \frac{1}{H(P)^{\epsilon}}$$

for $\forall\, P \in C(\overline{K})$ with finitely many exceptions. Here $H(P)$ means the Weil Height of $P$ associated with a closed immersion into $\mathbb{P}^N$

今回の話は、有理点、つまり空間の方のディオファンタス近似の話なので、関数の方のディオファンタス近似の話は省略しますが、とにかく、

| ディオファンタス近似 | (有理点) 空間 /数体 | 関数 /$\mathbb{C}$ |
|---|---|---|
| 代数方程式の解 | ○ | ○ |

な感じ、になっているかと思います。(○ は既知の意味)

しかし、これは両方とも、代数関数、つまり、代数方程式の解、に関する話題なわけです。代数的な話です。

ところが、実はこの関数の方のディオファンタス近似に関しては、

関数の方のディオファンタス近似は代数関数でなくてもよい。

つまり、代数方程式みたいに代数的でない、ものでも関数論的なディオファンタス近似というものは成り立つ、というものが知られています。

具体的には、(線形) 微分方程式 /$\mathbb{C}$ のベキ級数解に対して、[K], [C2], [Shi], [O] 他によって、微分方程式の解を有理関数で近似する、すなわち

微分方程式 /$\mathbb{C}$ の解の、関数論的なディオファンタス近似

が知られています。

つまり、

| ディオファンタス近似 | (有理点) 空間 /数体 | 関数 /$\mathbb{C}$ |
|---|---|---|
| 代数方程式の解 | ○ | ○ |
| 微分方程式の解 | | ○ |
| | ↑<br>ここ | |

ということで、「ここ」の席が空いている、ということになります。
これが今回の話の出発点です。

考えたいことは、
この「代数曲線」の有理点に関するディオファンタス近似は拡張出来るのか?
言い換えれば、有理点のディオファンタス近似、というものは、代数曲線やら、代数多様体に限った性質じゃないんじゃないか?

目標は、

代数曲線の有理点に関するディオファンタス近似を、タイトルにある $G$-関数、すなわち、線形微分方程式の解である、さっきの言葉でいうところの、近-代数関数、に「拡張」したい。

この種の話に関連することとして、有理点の個数の評価、という話もあるかと思います。
しかし、今回は話をディオファンタス近似、Liouville の不等式にターゲットを絞り、有理点の個数という話題は参考程度の言及にとどめることにします。

## §2 $G$-関数は代数関数に近い (近-代数関数)

ここでディオファンタス近似の方を眺めるのをオシマイして、次に $G$-関数の話をします。
少し代数的整数論の反対側にあるような (?) 超越数論での話、にも強く関係しているのですが、従来の $G$-関数の見方を少し変えよう、という話をこの章で述べます。

先走りますと、この章での話の内容は、
・$G$-関数は代数関数に近いもの、だろう。
・従って、$G$-関数を超越数論的な視点で捉えるよりも、代数的な視点で捉えた方がすっきりしているかもしれない、
という話です。

さて、先ほどの表（最後の表）の空いている席の話の続きをします。
先述しましたが Liouville の不等式から超越数が構成出来たように、ディオファンタス近似は超越数と馴染みがあるかと思われます。

例えば、ある微分方程式の解の特殊値、に関して、超越数論から見ればとても良い結果、というか、ある種の線形微分方程式の解のクラス、具体的には $E$-関数、というものですが、それについては、代数的数を代入した値は超越数（勿論無条件で言えるわけではありません）、というような結果が（$E$-関数では）知られています。（$E$-関数に関しては [Shi] 参照）

$E$-関数の定義はここではしません。が、例えば指数関数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (E\text{-関数}).$$

は典型的な $E$-関数の例です。実際 $E$-関数はこの指数関数の拡張と思えるような関数です。
$E$-関数の結果とは、これに代数的数を代入した値は超越数、というような話です。

ここで、この指数関数 $e^x$ の級数表示を見ますと、

$E$-関数は収束が速いベキ級数

ということが感じとられると思います。実際、$E$-関数の定義自身がベキ級数の係数に条件を課すものであり、その定義より「収束が速い級数」ということが分かります。
先ほどいいましたが、収束の速い級数は代数的でない（らしい）ということを思い出すと、この、収束が速いベキ級数なる $E$-関数、実際、代数的数での値が超越数になる、ということで、$E$-関数はなんとなく超越数よりな関数、と見れるかと思います。例えば、当たり前ですが、数体上の代数関数の代数的数での値は代数的数、ですから、$E$-関数はもう全然代数「的」ではない[2]。つまり「代数的」からは程遠い関数と考えることが出来る。

ということで、$E$-関数は、最初に述べた、遠-代数関数の仲間、ということにさせてください。

(線形微分方程式の解のジャンルわけ by 著者)

| 代数関数 | 近-代数関数 | 遠-代数関数 |
|---|---|---|
| | ($G$-関数) | $E$-関数 |

そもそも、近-代数関数、遠-代数関数、なんてのはここだけの造語、なので、なんとなくな感じ、ということでお許しください。

とにかく $E$-関数という、ある線形微分方程式の解、に対しては、代数的数での値が超越数、という強い結果が知られているものがありまして、さらに、詳細は省略しますが、その他にもこの $E$-関数の特殊値の有理近似の評価、つまりディオファンタス近似も知られています。この意味では、先の表の空いている席は「$E$-関数に対しては埋まる」ということになるかと思われます。

しかし、$E$-関数は、「有理点」みたいなものを考えても仕方がなさそうな、代数的数での値が「バリバリ？」超越数になるような遠-代数関数なわけでして、これをもって「代数曲線の <u>有理点</u> のディオファンタス近似の拡張」と呼ぶのにはやはり抵抗があります。

[2]実は、多項式は $E$-関数なのでこの言い方はよくないかもしれませんが、有理関数体が微分方程式の定義体なので、気にしないことにします。

$E$-関数の話はこれでオシマイにして、一方、$E$-関数の他に $G$-関数、というのがあります。
今回の話は $G$-関数なわけですが、ちなみに $E$-関数も $G$-関数も Siegel が導入した概念です。

$G$-関数の定義を述べます。

以下、$K$: 数体 with $[K:\mathbb{Q}] < \infty$, とする。

定義：($G$-関数)
$G$-関数とは、
(0)　$K(x)$ 上線形微分方程式

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (a_0, \ldots, a_n \in K[x]) \tag{eq}$$

(1)　のベキ級数解：

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i \quad (\in K[[x]]), \quad \alpha_i \in K$$

(2)　なるもので、ベキ級数の係数の Height が高々等比数列的にしか増えないもの：

$$0 < \exists\, C < \infty \text{ s.t. } H(\alpha_0, \ldots, \alpha_i) \le C^i \quad \text{for } i \in \mathbb{N},$$

where $C$ is independent of $i$.

この定義の (2) が直感的でないかもしれません。すぐこのあとに例を挙げます。

さて、この線形微分方程式 (eq) は行列型、でも書けます。線形微分方程式が行列の形のものの場合も述べておきます。
次の線形微分方程式を考える：

$$\frac{d}{dx} m = Am, \quad A \in M_n(K(x)) \tag{EQ}$$

ここで $m$ はベクトル解、としておきます。
この線形微分方程式 (EQ) のベクトル解 $m$ の各成分が定義 (1), (2) を満たしていれば、それも $G$-関数、と呼びます。

$G$-関数の例を挙げながら、なんとなく $G$-関数は $E$-関数とは違う、というようなことを述べることにします。

例：($G$-関数の例)

(1)

代数関数 / 数体は $G$-関数.

勿論ベキ級数で書けていなくてはなりませんが、とにかく、代数関数は $G$-関数です。参考ですが、数体上定義の代数関数が $G$-関数になるという事実は、各素点での収束半径の評価である Eisenstein の定理によって導かれます。

(2) 先ほど指数関数 $e^x$ は $E$-関数と述べました。一方、log, 対数関数は $G$-関数、になります。あと polylogarithms も $G$-関数です[3]。ここで、対数関数 log もベキ級数で書いてみると

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (G\text{-関数})$$

[3] リーマンゼータの特殊値と多重対数関数の特殊値について：$G$-関数の特殊値問題に関して、多重対数関数は $G$-関数なのだから、リーマンゼータの特殊値はわからないものか？という疑問が沸きます。しかし、リーマンゼータの自然数での値は多重対数関数の収束半径の（円盤の）境界上の話、という理由等で、現在のところ $G$-関数からのアプローチではリーマンゼータの特殊値の性質は全くわかりません。

ですから、これをみると

G-関数は収束が遅いベキ級数

というのが想像出来ると思います。

勿論、代数関数もベキ級数で書くと、収束が遅いベキ級数になります[4]。

(3) 少し条件がつきますが、Gauss の hypergeometric series も $G$-関数です。($_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$, 但し $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$.)

ここで注意ですが、例えば対数関数 log なんかはその代数的数での値が超越数になることが知られていますが、一方、hypergeometric series などではそうとは限らないことが知れています [Wo] 。つまり

可算個の代数的数での値が代数的数になるような代数関数でない $G$-関数が存在する

ということになります。

ということで、なるほど、$G$-関数は遠-代数関数じゃない、というか、おかげで $G$-関数の「有理点」みたいなものを考える意味がありそうだ、とかいう感じです。

とにかく、しつこいですが

代数関数 / 数体 は $G$-関数

なわけです。さらに、

$G$-関数は収束が遅いベキ級数である。

ということで、話を戻して代数関数は $G$-関数だし、収束が遅いベキ級数という点が似ているし、等と考えたりすると

(線形微分方程式の解のジャンルわけ by 著者)

| | | |
|---|---|---|
| 代数関数 | 近-代数関数 | 遠-代数関数 |
| | $G$-関数 | $E$-関数 |

という具合にしてもよいかと思います。

勿論、他にも線形微分方程式の解はあるかも知れませんが、ここでの話題はジャンルわけ、の話ではないので、追求しません。

さて、$G$-関数の定義はこれでオシマイとして、次に $G$-関数の特殊値に関して振返ってみます。

先ほど $E$-関数の数体上での値は超越数になる(無論無条件ではない)と述べました。$G$-関数についてもその特殊値は考えられていまして、例えば、先人達の結果 [G], [B], [C1], et al として、$G$-関数については、

$E$-関数のアナロジーとみて、$G$-関数を扱う

ということがなされております。

ここが今回の話のポイントだと思います。「$G$-関数を $E$-関数のアナロジーとして扱っていた。」

例えば知られていることとして、$G$-関数の特殊値の性質、特に $G$-関数に、例えばある有理数を代入した値、のディオファンタス近似というのがあります。先に述べた [G], [B], [C1], et al などに代表される結果ですが、本当はもう少し良いのですが[5]、ちょっと大げさに書きますと[6]、

---

[4]ここでも、収束が速い遅い、と書いていますが、先に少し述べました通り、本来ならば、各素点での位相に関するベキ級数の収束半径の話題として述べる方が(少なくとも $G$-関数に関しては)妥当です。それに関しては [A], [B] 等参照。

[5]$1/q$ としていますが、本当は $p/q$ with $p<O(q^\epsilon)$ がより正確な記述です。($p<q^\epsilon=(q^{\epsilon-1})q$ なので $1/q$ でも大差ない?)

[6]ここでの述べ方だと、命題2は良くないのか?と勘違いされるかもしれませんが、事実はその反対です。この命題2は画期的なものでして以後の $G$-関数の研究に大きな影響を与えています。(それ以前はすべて $G$-関数の特殊値の結果には、後述する $G$-operator という条件が仮定として必要だったのですが、この命題2以降不要になりました。次章の $G$-関数と $G$-operator の同値性参照。)

命題２：(Chudnovsky) [C1]
簡単のため、$K=\mathbb{Q}$ とする。

Let $m={}^t(f_1,\ldots,f_n)$ be a vector solution for (EQ). ($n\geq 2$). Suppose that $f_1,\ldots,f_n$ are linearly indepependet $/K(x)$ and they are $G$-functions. Then for $\forall\,\epsilon>0$, there exsit $\infty>\exists\,c_1,c_2>0$ (: effecitive) s.t. $\forall\,q\in\mathbb{Z}$ with $|q|>c_1$

$$|H_1 f_1(1/q)+\cdots+H_n f_n(1/q)|>\frac{H}{H^{n+\epsilon}}$$

for $H_1,\ldots,H_n\in\mathbb{Z}$ with $H:=\max_i|H_i|>c_2$. □

特に $f_1=1$, $H_2=\ldots=H_{n-1}=0$ とおけば、

$$|H_1+H_n f_n(1/q)|>\frac{H}{H^{n+\epsilon}}$$

ですから、これはディオファンタス近似なわけです。
勿論ここで、$1/q$ の分子は１である必要はないのですが、少なくとも分母 $q$ は分子に比べてとても大きい、という条件がこの命題２では必要です。

この意味で $G$-関数のディオファンタス近似が分かっている、つまり先の表の空いている席が一応埋めることができる、といえなくもありません。

しかし、すぐに気づかれますように、この $G$-関数の特殊値のディオファンタス近似の結果は、不自然な感じのする強い制限がある。つまり、「$1/q$ を代入した値についてしかわからない。」「分母は分子に比べてすごく大きくてはならない。」

その原因、つまり、この強い制限が必要となる源は、どこにあるかと考えると…：
$G$-関数が収束が遅いベキ級数なものだから、代入する値 $1/q$ の方を調節して少しでも収束を速くしよう、という考えが源であろう。
つまり、$G$-関数は収束が遅いベキ級数なのにも関わらず、収束の速いベキ級数と同じにみている。言い換えれば

$G$-関数は代数関数に近いのにも関わらず、超越数からの視点から見ている。

このことが不自然さの源だと思われます。

まとめると：

・代数関数の拡張であるような $G$-関数については、先の表が埋まっているとはいい難いであろう。
・その理由の源は $G$-関数は近-代数関数にも関わらず、遠-代数関数のアナロジーと見ているから、かもしれない。

従って、

$G$-関数は近-代数関数なのだから、代数関数のアナロジーとみる方が自然

ではないか？例えば、代数曲線のディオファンタス近似が「有理点」のディオファンタス近似とみれたように、

$G$-関数の「有理点」に限ってディオファンタス近似を考えれば「すっきりする」

のではないか？
勿論、いくら近-代数関数なる $G$-関数とはいえ、代数関数とは別物ですから、$G$-関数の特殊値問題はやはり代数的整数論というよりは超越数論に属する問題だと考えたほうが適切かもしれません。しかし、ここでは（超越数論の特殊値問題というより）代数曲線の有理点の問題の親戚だと思ってしまえ。
この考え方が、$G$-関数について従来と異なっている点だと思います。

## §3 Results

$G$-関数、$G$-関数、と言っていますが、私個人としては、

$G$-関数という、条件の付いたベキ級数解（ある点の近傍という意味で local な感じがする）

という、たまたま微分方程式の解になっているような（？）ベキ級数、を考察の対象にする、というよりは

微分方程式自身に数論的な条件をつけたもの、の解（local な感じが少ない）

（と解釈できるならそれ）を $G$-関数と呼んだほうが気分的に良い、と考えています。

実際に（ほとんど）そう解釈できます。それを述べます。

ここで、数論的な条件をつけた線形微分方程式、$G$-operator というものを定義をします。直感的に何をいっているか分かりにくいのですが、とにかく次で与えられるものです。

定義：($G$-operator)
$d/dx - A$ (in (EQ)) (or 微分方程式 (EQ)) is a $G$-operator $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sum_{v\nmid\infty} \frac{1}{m} \max_{i\le m} \log^{+} \left| \frac{1}{i!} \left( \frac{d}{dx} + {}^{t}A \right)^{i} I \right|_{v} < \infty.$$

Here, $\sum_{v\nmid\infty}$ means $v$ runs every normalized non-Archimedean valution of $K$, and $I$ is the identity matrix, the symbol $|\cdots|_v$ is so-called the Gauss norm at $v$.

細かくなりますが、この定義だと、座標のとり方に依存しているようにみえるかもしれません。しかし変数 $x$ を一次変換やら有理関数の変換やらしても $G$-operator は $G$-operator になるとわかりますので、実際には座標のとり方には依存しません。([N2] 参照)

で、この直感的に良く分からない？定義、ですが、実は、条件付きなのですが、大体、この $G$-operator という概念と、$G$-関数という概念は同値であることが知られています。

$$G\text{-関数} \;\Leftarrow\; \begin{array}{c}\text{条件付きで}\\ \text{同値な概念}\end{array} \;\Rightarrow\; G\text{-operator}$$

つまり、ある条件の下では、$G$-関数を解に持つ線形微分方程式は $G$-operator であり、また、逆に、$G$-operator の解 / 数体 は $G$-関数である、みたいなことが知られています。([C1], [A], [N1] 参照)

この話は local なある解である $G$-関数と global で定義されている $G$-operator が（条件がつくとはいえ）同値である、ということですから、数体上の不思議さ、というか、驚きの事実かと思います[7]。

とにかく、$G$-operator というのは上の数論的な条件がついた線形微分方程式のことで、それは $G$-関数と、大体、同じ概念である、ということです。

ということで、主結果を述べます。

Let $d(x) \in \mathbb{Z}[x]$ : the common denominator of components of $A$ in (EQ).

定理：(主結果)
Let $D$ be a closed disk $\subset \mathbb{C}$ centered $\zeta_0 \in K$ (given) with the radius $< 1/2$ : (given)
For a vector solution of (EQ): $m = {}^{t}(f_1 \ldots f_n)$ (: given)
We suppose that
(0) (EQ) is a $G$-operator, and suppose that $n \geq 2$.
(1) $m$ is analytic on $D$ and $f_1, \ldots, f_n$ are linearly independent over $\mathbb{C}(x)$,
(2) There exist no solutions of $d(x) = 0$ on $D$.

[7] これが先に命題２が画期的な結果だと述べた理由です。

$$S_K := \{\zeta \in D \cap K \mid \exists\, \kappa_\zeta \in \mathbb{C}, \neq 0 \text{ s.t. } \kappa_\zeta m(\zeta) \in K^n\}.$$

(ここが「有理点」みたいなものを考えているつもりです。)

Then we obtain:

(a) If $\zeta_0 \in S_K$, then for any small positive $\forall\, \epsilon > 0$, there exists a finite effecitive constant $\exists\, c < \infty$ such that

$$|\zeta_0 - \zeta| \geq \frac{1}{H(\zeta)^{[K:\mathbb{Q}](\frac{1}{n}+\epsilon)}} \quad \text{for } \forall\, \zeta \in S_K \text{ with } H(\zeta) \geq c.$$

Here $c$ depends on $\zeta_0$, $A$, $\epsilon$ and is independent of $\zeta$.

———

つまり、「有理点」のディオファンタス不等式でこのようなことが言える、ということになります。

Liouville の不等式と色々なところが似ているのでこれが $G$-関数の「有理点」の Liouville の不等式、ということになるかと思います。

また、effective, ということも Liouville の不等式、の大事な点なので、この定数 $c$ の effecitive 性、も重要かと思います。

ここに $\epsilon$ が出てきてますが、少なくともテクニカルな理由で $\epsilon$ は今のところ取り除けません。つまり最初に述べた Liouville の不等式(命題 1)のような形に書けるか今のところわかりません。

この (a) の corollary になるのですが、次もいえます。

———

Moreover, Assume that $f_1, \ldots, f_n$ are homogeneously algebraically independent over $\mathbb{C}(x)$,
and assume that they are $G$-functions.
Then we have:
(b) If $\zeta_0 \in S_K$, then for any small positive $\forall\, \epsilon > 0$, there exists a finite constant $\exists\, c < \infty$ such that

$$|\zeta_0 - \zeta| \geq \frac{1}{H(\zeta)^{\epsilon}} \quad \text{for } \forall\, \zeta \in S_K \text{ with } H(\zeta) \geq c.$$

Here $c$ depends on $\zeta_0$, $A$, $\epsilon$ and is independent of $\zeta$. □

この場合は、右辺の肩にのっているのが $\epsilon$ というとても小さい数でよろしい、ということになります。

今回得られた評価だけ、をみての話なんですが、代数曲線の場合を振返ると、

・代数曲線の場合は、genus 0, すなわち、なんか有理関数的な場合と、genus が 1 以上の、そうでない場合で、ディオファンタス近似の評価がかなり違った
わけですが

・今回の結果をみると $G$-関数の場合は、代数的な場合、つまり超越的な条件がない (a) の場合と、そうでない (b) の場合で、評価がかなり違う
というのが、ちょっぴり似ている感じもしまして、それは単純な理由で説明できるとはいえ、面白いかな?と思っております。

```
                 代数関数                          G-関数
             ==========  +  →  +  ========
評価大 ←    有理的 (g = 0)  |     |
             ---------  +     |   代数的 (a)     → 評価大
評価小 ←   非有理的 (g ≥ 1) |  ↘  |   (非超越的)
             ---------  +     +  ------
                            ↘  |   超越的 (b)     → 評価小
                               +  ------
```

(ここで、有理的、非有理的、などは有理関数的、非有利関数的、等の意味。)

代数曲線の拡張になっていなくてはなりませんから、一つ例を挙げます。

例：
$t \geq 2$: 自然数、として曲線 $x^t + y^t = 1$ を考える。
これは代数方程式ですが、微分方程式にすると $y = \sqrt[t]{1-x^t}$ は

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^{t-1}}{x^t-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

をみたす。ここで (a) で $n = 2$ として

$\zeta_0$ を（例えば）0,
$D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1/3\}$

などとおく。定理の $S_K$ は

$$S_K := \{\zeta \in D \cap K \mid y = \sqrt[t]{1-\zeta^t} \in K\}$$

に対応するので、$\epsilon > 0$ (十分小) に対し $\exists\, c < \infty$ (effecitive) s.t.

$$|\zeta_0 - \zeta| \geq \frac{1}{H(\zeta)^{[K:\mathbb{Q}](\frac{1}{2}+\epsilon)}} \quad \text{for } \forall\, \zeta \in S_K \text{ with } H(\zeta) \geq c. \quad \square$$

仮に、ある代数曲線の有理点の個数が、有限個、と分かっていても、それが ineffecitive な有限個の結果ならば、この例のような effecitive な意味の Liouville の不等式は単純にはいえないかと思われますので（代数曲線の有理点の個数が ineffecitive に有限個とわかっているからといって）この例は全くつまらん、とはならないと思います。

ここで注意ですが、有理関数でない代数関数 $y$ は

$1, y$ は $\mathbb{C}(x)$ 上線形独立だが、一般に $1, y, y', y'', \ldots$ は $\mathbb{C}(x)$ 上線形独立とはいえない

ので、評価が $1/t$ でなく $1/2$ になっています。実際この例では $1, y, y'$ は線形従属 $/\mathbb{C}(x)$ です。

代数関数以外にも適用出来ないと、「拡張」にはなりませんので、その一つの例を挙げます。

例：

$$y(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-tx)}}, \quad w(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{(1-tx)dt}{\sqrt{t(1-t)(1-tx)}}$$

とおく。これは第一種完全楕円積分、第二種完全楕円積分と呼ばれる Gauss の hypergeometric series で書ける関数です。勿論 $G$-関数です。
このとき

$D :=$「中心 0 半径 1 の開円盤内の 0 を含まない半径 1/2 より小の閉円盤」$\subset \mathbb{C}$
$S_K := \{\zeta \in D \cap K \mid w(\zeta) \neq 0,\ y(\zeta)/w(\zeta) \in K\}$

としたもので定理の (b) の評価が成り立つ。
さらにオマケとして次がいえます：

$$\overline{\lim_{B\to\infty}} \frac{\log \#\{\zeta \in S_K \mid H(\zeta) \leq B\}}{\log B} = 0. \quad \square$$

自明な評価は $\leq 2[K:\mathbb{Q}]$ です。

ディオファンタス近似と有理点の個数の評価の関係について：

Liouville の不等式は、ある点の周りにある意味あまり有理点がない、という見方が出来ますから、従って、有理点の個数を上から数えることが出来るだろう、となんとなく想像出来るかと思います。

しかし、実際には、ある一点の周りをみただけでは不十分で、ある区間やらある領域「全体」でみないと有理点の個数を数えたことになりませんからここで述べた Liouville の不等式から直接有理点の個数が評価出来るというわけではありません。しかしその variant を考えたりすれば、評価できるだろう、ということになるかと思います。

例えば、(a) の場合は

$$\overline{\lim_{B\to\infty}} \frac{\log \#\{\zeta \in S_K \mid H(\zeta) \le B\}}{\log B} \le \frac{4}{n}[K:\mathbb{Q}],$$

を得ることができます。(自明な評価は $\le 2[K:\mathbb{Q}]$.)

(b) の場合だと

$$\overline{\lim_{B\to\infty}} \frac{\log \#\{\zeta \in S_K \mid H(\zeta) \le B\}}{\log B} = 0,$$

が得られます。

ちなみに代数関数の場合、記号 $n$ の意味が違いますが、genus が 0 だと $2[K:\mathbb{Q}]/n$, genus が 1 以上だと 0 です。([Se] 参照)

## §4: ＋$\alpha$.

今までの話は、$G$-関数は近-代数関数だから代数関数よりな「有理点」を考えよう、というものです。しかし、代数関数のマネをして、コンパクトなリーマン面、に代表されるような global な話を考えようと思ってもてんでさっぱり分からない。結局、$G$-関数は代数関数でないので代数曲線のように考えようとするのは（今の私には）困難である、という結論に達しました。今回の $G$-関数の扱い方も、結局代数曲線のように扱うものではなく、（従来通り）超越数論的な手法です（ただし $E$-関数のアナロジー、というような扱い方はしない)。

ここでいう超越数論的手法とは大雑把にいえば次のようなものです：(勿論これに属さないような超越数論的手法もあります)

方法：(超越数論の代表的手法)

例えば、ある（解析）関数 $f(x)$ の特殊値が超越数、或いは無理数、等など、を示したい：

考えたい関数 $f(x)$ に対して、

(0)「神様からの啓示を受ける」か或いは「ジーゲルの補題」を用いて補助関数 $g(x)$ を見つけて、

(1) もし、考えたい関数 $f(x)$ の特殊値 $f(\alpha)$ が代数的数、或いは有理数、等など、と仮定すると、

(1-1) 数論的に考えると、$g(x)$ に関する値 $g(\alpha)$ が、有理整数になる。特にその値が 0 でなければその絶対値は 1 以上である。(積公式)

(2) 一方、関数論的に考えると、この $g(x)$ に関する値 $g(\alpha)$ の絶対値が 0 より大で 1 より小さい。(留数の定理周辺)

従って、背理法より (1) は否定される。 □

勿論これは大袈裟にいっているもので、これだけで超越数論での方法を語るのは大変な間違いでしょうし、証明の方法としても実際には異なるところがあると思います。当然必ずしも (1-1) やら (2) である必要もないでしょう。しかし大雑把な枠組みとしては、多くの超越数の証明で上のような手法・論法が見られることも事実でして、とりあえず、ここではこれを超越数論の代表的手法、と呼ばせていただくことにします。

ここでいいたいことは、超越数論の代表的手法には、「補助関数」というものが現れる、ということです。これが大きな特徴かと思います。

補助関数が現れる。

今回の証明では、(0) の補助関数に、関数論的 Diophantine 近似である、Padé 近似というものを考え、(2) の関数論的評価のところに Jensen の公式を使う、というものです。

補助関数に Padé 近似を用いるというのは非常によく使われる手法ですし、また Jensen の公式についても、若林先生の [Wa] でも使われていますので、証明の道具に関してはそう特別なものではないかもしれません。

ただ、$G$-関数で、有理点の Diophantine 近似、という視点でみると、数の積公式と Jensen の公式というまた別の積公式を二つを並べると面白い？感じがします。以下それを説明します。

簡単のため以下 $K = \mathbb{Q}$ とします。

数体の積公式は $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ としますと、

$$\sum_{p \nmid \infty} (\mathrm{ord}_p\, a) \log \frac{1}{p} \quad - \quad \log \frac{1}{|a|} = 0$$

みたいな感じ書けますが、

$$(\otimes)' - (\oplus) = 0 \tag{p}$$

と書くことにします。ダッシュ$(\cdots)'$ がついているのは weight（？）$\log 1/p$ があるから、程度の意味です。

Jensen の公式というのは、原点中心で半径 $R$ の closed disk $D \subset \mathbb{C}$ 上有理型関数 $f$ に対して、

$$\left( \sum_{\zeta \in D^\circ \setminus \{0\}} (\mathrm{ord}_\zeta\, f) \log \frac{R}{|\zeta|} + \mathrm{ord}_0\, f \right) \quad - \quad \left( \int_{\partial D} \log |f(z)| dz - \log \left| \frac{1}{(\mathrm{ord}_0\, f)!} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^{\mathrm{ord}_0 f} f(0) \right| \right) = 0$$

みたいな感じなので、これも

$$[\otimes]' - [\oplus] = 0 \tag{J}$$

と書くことにします。

ちなみに $\otimes$ が non-Archimedean, $\oplus$ が Archimedean な気持ち（？）です。

次に (EQ) の $G$-関数[8] の解 $m = {}^t(f_1, \ldots, f_n)$ に対し、適当な有限集合 $V \subset \mathbb{C} \cap K$ で

$$\sum_{\zeta \in V} \mathrm{ord}_\zeta (P_1 f_1 + \cdots + P_n f_n) \geq (n - \delta) \max_i \deg P_i$$

なる $P_i \in K[x]$, $0 < \delta < n$ というものを考える。この $P_i$ は実際存在します。

$$\phi := P_1 f_1 + \cdots + P_n f_n$$

がこのように high order をもつとき、つまり関数論的なディオファンタス近似としてある程度よい近似になっているとき、この近似 $P_1 f_1 + \cdots + P_n f_n$ のことを Padé 近似と呼びます。

とにかく、この式 $\sum_{\zeta \in V} \mathrm{ord}_\zeta\, \phi - (n - \delta) \max_i \deg P_i \geq 0$ を

$$[\otimes] - \deg(F) \geq 0 \tag{P}$$

と書くことにします。$\deg(F) := (n - \delta) \max_i \deg P_i$ です。

さらに $f_1, \ldots, f_n$ が $G$-関数のとき、Siegel の補題という結果を利用するとパデ近似 (P) で考えた $P_1, \ldots, P_n$ に対し、

$$h(P) \leq \alpha \deg(F) + \beta$$

というものが存在することがわかります（これが Siegel の補題）。ここで $h(P) := \max_i h(P_i)$（$P_i$ の係数の height）とします。また、$\alpha, \beta$ は $V$ に依存する値とか $G$-operator の size という (EQ) から得られるある定数とか、その他 とか、とにかくもろもろな値、とします。

[8] 主結果では (EQ) が $G$-operator ですが、話を簡単にするため。

これを、強引ですが、$\deg(F') := \alpha\deg(F)+\beta$, $\overline{(\otimes)'} := h(P)$ と書くことにして

$$\text{(S)}\qquad \alpha\deg(F)+\beta-h(P)=\deg(F')-\overline{(\otimes)'}\geq 0$$

と書くことにします[9]。実はこの $h(P)$ が $\deg(F)$ の一次式で押さえられる、という点が $G$-関数の「$G$-」なところです。(従って $G$-関数以外では以下の議論はナイーブには無理です。)

そうして (J) の $f$ を $\phi$, (p) の $a$ を $\frac{1}{\mathrm{ord}_0 f!}(\frac{d}{dx})^{\mathrm{ord}_0 f}f(0)$ としてやると

$$[\oplus] \text{ と } (\oplus) \text{ が(一部)重なる.}$$

($K\neq\mathbb{Q}$ のときは結構ずれてたりもするんですが、少なくとも $\mathrm{id}:K\hookrightarrow\mathbb{C}$ という自明な射に対応する付値は重なる。)

ということでこの4つの式を並べてみると

$$\begin{array}{cccccccccccl}
- & \deg(F) & + & [\otimes] & & & & & & & \geq 0 & \text{(P)}\\
 & & - & [\otimes]' & + & [\oplus] & & & & & \geq 0 & \text{(J)}\\
 & & & & - & (\oplus) & + & (\otimes)' & & & \geq 0 & \text{(p)}\\
 & & & & & & - & \overline{(\otimes)'} & + & \deg(F') & \geq 0 & \text{(S)}
\end{array}$$

従って、全部加えれば、なんとなく $-\deg(F)+\deg(F')\geq 0$.(本当は weight 等のずれはあるのだけど)

今回の話はディオファンタス近似、つまり $\log|\zeta-*|$ みたいなものの評価ですから (J) をちょっとずらしたものを考えることによって、$[\otimes]'$ の weight の $\log|\zeta|$ を評価してるとみなせる。

従って、

$$\text{定理の否定を仮定} \Rightarrow [\otimes]' \text{ の weight の(無理な)条件} \Rightarrow -\deg(F)+\deg(F')\geq 0 \text{ に矛盾。}$$

という感じです。

勿論、これは大雑把な話で、実際には $G$-関数に関する議論やら、超越数論は解析数論の仲間ということで(?)、大量の計算やらが必要ですが、大体のあらすじは、以上でよいかと思われます。

さてわざわざ紙面を割いて証明のあらすじを長々と述べたのはこの4つの不等式を並べて書きたかったからです。

先に述べたように $G$-関数でないとこの4つの不等式は得られないような気もしているのですが、とにかく、

4つの不等式のうち、3つを加えると、残りの1つの「反対の向きの」不等式、がなんとなく得られる。

というのに気がつかれると思います。

勿論、記号の付け方がトリック、のわけです。しかし、気持ち的には、それほど間違いでもないと考えております。つまり不等式なのですが、うまい具合に交代和が閉じている(?)ように見えます。

これ以上のこれに関する詳細な話題は、またの機会にしたいと思いますが、とにかく、単純に4つの不等式を並べただけ、でも十分魅力を感じます。

さて、先ほどは大雑把に4つの不等式を足して、$-\deg(F)+\deg(F')\geq 0$ としましたが、交代和で閉じている(?)ようだ、ということなので、きちんと足してみると:

$$\text{(G)}\qquad \Big(\deg(F')-\deg(F)\Big) \;-\Big(\overline{(\otimes)}-(\otimes)'\Big) \;-(\oplus) \;\geq\; -\Big([\otimes]-[\otimes]'\Big) \;-[\oplus].$$

実際の証明では Padé 近似の $P_i$ の degree を無限大にとばします。そうすると (G) は

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \alpha+\text{「パデ近似の } h(P) \text{ を均した物」}\\ &\geq \text{(J) の weight(ディオファンタス近似的な物) - Archi. な部分} = \text{右辺.}\end{aligned}$$

のような感じになります。

とにかく、(G) を、ジッと見つめますと、ここからは妄想以外何物でもありませんが、なんか、この式は Riemann-Roch の公式

$$\deg D-\deg E-\dim_k H^0(X,\mathcal{L}(D))-\dim_k H^1(X,\mathcal{L}(E)) = -\dim_k H^0(X,\mathcal{L}(E))-\dim_k H^1(X,\mathcal{L}(D))$$

---

[9] $h(P)$ を $\overline{(\oplus)}+\overline{(\otimes)'}$ と書かなくてもよい、という妥当な理由があります。[B] の Siegel の補題参照。

に似ているような気もしなくなくもありません。
勿論、ジッと見つめているだけでの話で、コンパクトリーマン面の話でもないですし、何と何が対応しているか、などは妄想を悪化させるだけですが、とにかく、なんか似てると思ってしまう。
先に述べた超越数論での代表的な手法で、補助関数が現れるのが特徴的だ、と述べました。そこでこの「似ている」という妄想の力を借りると、補助関数が現れる理由、補助関数が出てこないといけない理由、がなんとなく納得できるような気がする。
勿論これは $G$-関数だけの話で一般の超越数論での話には通用しないと思われます。
しかし、超越数論での代表的手法、というものが主張するものの中には、もしかして何か幾何的なものがあるのかな？と思ってしまったりもして、ここらへんの話が今回の話題の一番楽しい（？）ところだ、と考えております。

## §∞ 最後に

さて、今回の研究集会の最後に次のようなことを述べました。

———

今回の最初の話に戻って、通常のいわゆる Liouville の不等式の証明は二パターンあります。

・一つは、完全に height だけの話にして証明する。
・もう一つは、古典的な方法で、ターゲットの代数的数の定義多項式を補助関数にして、高校で習う連続関数の平均値の定理（関数論）と、補助関数のある値が有理整数になる（数論）、を組み合わせて証明するもの。

で、Liouville の不等式を今回話した命題 1 の形で書いたとき
・前者の height を使った証明だと、少し代数幾何を使う[10]。
・後者の証明方法はいわゆる超越数論的な手法[11]。

つまり、
・前者の証明方法は代数幾何或いはディオファンタス幾何の範疇に入ってると思えて、代数的。
・後者の証明方法は同じディオファンタス近似なんだけど、超越数論的。
同じディオファンタス近似なんだけど Liouville の不等式は両方の側面を持っている。

Liouville の不等式は、前者のように代数幾何的或いはディオファンタス幾何的に考えるとなにか当たり前な trivial な不等式に見えるかもしれないけれど、代数的という一方向からだけではなく、超越数という別の方向からみれば、超越数が具体的にかけたりもして興味深かったりもする。

そこで、$G$-関数に目を移すと、$G$-関数は代数的、非代数的の両方の側面を持っている。

今回の話は、$G$-関数は近-代数関数、ということで、

・遠-代数関数の類似とみるのはやめよう、

ということでした。
矛盾していると思われるかもしれませんが、でも、$G$-関数は代数関数とも違うのだから

・代数関数の類似とみることに固執するのもやめよう、

とも考えています。

というのは勿論これは個人的な意見で、明日には意見が変わっているかもしれません。が、最近ではなにもかもが「コンパクト」リーマン面の類似、みたいな見方は少なくとも $G$-関数に対しては、あまり適していないんじゃないか？と思ったりしています。少なくとも今の私にとっては適していない、と思っています。

---

[10] $H(f(t)) \sim (\deg f)H(t)$ のところ。
[11] 今回の命題 1 の形、の超越数論的な証明は知らなかったのですが、（少なくとも）今回の主結果の証明方法はそれにあたると思います。

そう思う理由は、考えようとしてもサッパリわからないから、という情けない理由からなんですが、逆に、全然わからない、ということは、そのように考えることがもしかしたら不適切なのかもしれない、という思いっきりご都合主義ですが、そんな風に考えたりもしています。

とにかく、まあ、都合よく考えよう、ということなんですが、少なくとも、どっちかに偏った考えをするのはよくないだろう、と思っています。

とにかく、$G$-関数は、二つの側面がある思えるわけだし、色々な見方をした方が、世の中平和で楽しくなるのではないか、と考えています。

---

勿論、これは、近年の自分の姿勢に対する反省として自分で自分に言い聞かせていることを口にしたものですが、時間をおいてもう一度読み直してみると、例え自分に言い聞かせてる話だとはいえ、なんか偉そうなことをいっているようにも思えてきて、またまた反省しております。

今回、このような自分の考えを述べる機会を頂戴したことに感謝しております。

また、私を講演者に推薦してくださり、そして発表の原稿作成の際にアドバイスをしてくださった同研究所の玉川安騎男さんにこの場を借りてお礼を申し上げます。

このような未熟な報告にもかかわらず、もしも $G$-関数や超越数論に興味をもっていただけるならば、大変嬉しく思います。

## References

[A] Y. Andre, *G-functions and Geometry*, Max-Planck-Institut, 1989.

[B] E. Bombieri, *On G-functions*, Resent Progress in Analytic Number Theory **2** (1981), Academic Press, 1–67.

[BC] E. Bombieri, P. B. Cohen, *Siegel's lemma, Padé approximations and jacobians*, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) **XXV** (1997), 155–178.

[BMV] F. Beukers, T. Matala-aho, K. Väänänen, *Remarks on the arighmetic properties of the values of hypergeometric functions*, Acta Arith. **XLII** (1983), 281–289.

[C1] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, *Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions*, Lect. Notes in Math. **1135** (1985), Springer-Verlag, 9–51.

[C2] ———, *The Wronskian formalism for linear differential equations and Padé approximations*, Adv. in Math. **53** (1984), 749–768.

[EE] B. Edixhoven, J. H. Evertse (Eds.) (eds.), *Diophantine Approximation and Abelian Varieties*, Lect. Notes in Math. **1566**, Springer-Verlag.

[G] A. I.Galočkin, *Estimates from below of polynimials in the values of analytic functions of a certain class*, Math. USSR Sbornik **24** (1974), 385–407; Original article in Math. Sbornik 95 (137) (1974) pp.396–417..

[K] E. R. Kolchin, *Rational approximation to solutions of algebraic differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 238–244.

[L1] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, 1983.

[L2] ———, *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces*, Springer-Verlag, 1987.

[M] K. Mahler, *On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic*, Canad. J. Math. **1** (1949), 397–400.

[N1] M. Nagata, *A generalization of the sizes of differential equations and its applications to G-functions*, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) **XXX** (2001), 465–497.

[N2] ———, *Transformations on G-functions*, preprint RIMS (1197).

[O] C. F. Osgood, *Nearly Perfect Systems and Effective Generalizations of Shidlovski's Theorem*, Jour. of Number Theory **13** (1981), 515–540.

[R] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20.

[Se] J. P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil Theorem (3rd ed.)*, Vieweg, 1997.

[Sh] A. B. Shidlovskii, *Transcendental Numbers*, de Gruyter Studies in Math., Walter de Gruyter, 1989.

[Si] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. nr. 1 (1929).

[U] S. Uchiyama, *Rational approximations to algebraic functions*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. **15** (1961), 173–192.

[Wan] J. T. Wang, *An effective Roth's theorem for function fields*, Rocky Mt. J. Math. **26** (1996), 1225–1234.

[Wak] I. Wakabayashi, *Algebraic values of meromorphic functions on Riemann surfaces*, J. Number Theory **25** (1987), 220–229.

[Wo] J. Wolfart, *Werte hypergeometrischer Funktionen*, Inv. Math. **92** (1988), 187–216.

Oiwake-cho Sakyo-ku Kyoto, 606-8502, Japan
*E-mail address*: mnagata@kurims.kyoto-u.ac.jp